Определения

1. Аксиома непрерывности (полноты) множества R:

Пусть X, Y ⊂ R, причем X ̸= ∅ и Y ̸= ∅. Тогда

(∀x ∈ X ∀y ∈ Y x ≤ y) ⇒ (∃c ∈ R : x ≤ c ≤ y ∀x ∈ X ∀y ∈ Y)

Если некоторое (непустое) подмножество R находится «левее»

некоторого (непустого) подмножества R, то между элементами этих подмножеств

всегда существует элемент из R.

1. Множество X ⊂ R называется индуктивным, если ∀x ∈ X (x + 1) ∈ X.

Индуктивное множество – это то, которое вместе с каждым элементом содержит «следующий» (с точки зрения натуральных чисел).

1. Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел как N.

Из этого определения, в частности, следует, что множество натуральных чисел – наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу.

1. Множество R = R∪{−∞, +∞} называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы −∞, +∞ – минус и плюс бесконечностями.

для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:

x + (±∞) = (±∞) + x = ±∞, x ∈ R,

x · (±∞) = (±∞) · x = (система) ±∞, x > 0 ∓∞, x < 0 ,

x ±∞ = 0, x ∈ R,

(±∞) + (±∞) = ±∞,

(+∞) · (+∞) = (−∞) · (−∞) = +∞,

(+∞) · (−∞) = (−∞) · (+∞) = −∞,

−∞ < x < +∞, x ∈ R.

1. Окрестностью точки x0 ∈ R называется произвольный интервал, содержащий x0.

Окрестность точки x0 – порция множества рядом (и даже с двух сторон) с точкой x0.

Проколотой окрестностью точки x0 ∈ R называется множество U(x0) \ {x0}, то есть произвольная окрестность точки x0 без самой этой точки. Проколотой ε-окрестностью точки x0 ∈ R называется множество Uε(x0) \ {x0}.

Проколотая окрестность и ε-окрестность точек x0 ∈ R обычно обозначаются заглавными латинскими буквами с кружочком наверху и индексом ε, соответственно, то есть o U(x0), o V ε(x0).

1. Окрестностью элемента +∞ в R называется множество вида (a, +∞], a ∈ R.

ε-окрестностью элемента +∞ в R называется множество (1/ε , +∞] , ε > 0.

Окрестностью элемента −∞ в R называется множество вида [−∞, a), a ∈ R.

ε-окрестностью элемента −∞ в R называется множество вида [−∞, − 1/ε) , ε > 0.

1. Множество X ⊂ R называется ограниченным сверху, если

∃M ∈ R: ∀x ∈ X x ≤ M. Найденное число M называется верхней границей для X.

1. Множество X ⊂ R называется ограниченным снизу, если

∃m ∈ R: ∀x ∈ X x ≥ m. Найденное число m называется нижней границей для X.

1. Множество X ⊂ R называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть ∃M, m ∈ R: ∀x ∈ X m ≤ x ≤ M.
2. Элемент M ∈ X ⊂ R называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если ∀x ∈ X x ≤ M.

Обозначают это так: M = max X.

Элемент m ∈ X ⊂ R называется минимальным (наименьшим) элементом множества X, если ∀x ∈ X x ≥ m.

Обозначают это так: m = min X

1. Пусть X ⊂ R ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (или точной верхней гранью) множества X и обозначается sup X.
2. В свою очередь, наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X и обозначается inf X.
3. Указанное в следствии число k называется целой частью числа x и обозначается [x]. Величина {x} = x − [x] называется дробной частью числа x.
4. Функция f: N→R называется последовательностью. Развернуто, но не менее точно можно сказать, что последовательность–это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.
5. Число A∈R называется пределом последовательности xn, если ∀ε>0 ∃n0=n0(ε)∈N: ∀n> n0 |xn−A|<ε.

Обозначают это так: lim (n→∞) xn=A, xn  **-** (n→∞) → A, xn−→A.

Число A называется пределом последовательности xn, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n0, зависящее от ε такое, что какое бы ни взять натуральное число n, большее n0, будет выполняться неравенство |xn −A| <ε

1. Если последовательность xn имеет предел A∈R (число!), то говорят, что она сходится. Иначе говорят, что она расходится.

Последовательности, которые имеют предел A∈R (конечный) – сходящиеся,

последовательности, которые имеют бесконечный предел или не имеют предела вовсе - расходящиеся.

1. Элемент +∞ называется пределом последовательности xn, если

∀ε>0 ∃n0=n0(ε)∈N: ∀n>n0 xn>1/ ε

Элемент −∞ называется пределом последовательности xn, если

∀ε>0 ∃n0=n0(ε)∈N: ∀n>n0 xn<-1/ ε

Обозначают это так: lim (n→∞) xn=±∞, xn**−** (n→∞) → ±∞, xn**−**→±∞

1. Говорят, что последовательность xn возрастает, если

∀n1, n2∈N: n1> n2 xn1 ≥xn2.

Говорят, что последовательность xn строго возрастает, если

∀n1, n2∈N: n1> n2 xn1> xn2.

1. Говорят, что последовательность xn убывает, если

∀n1, n2∈N: n1> n2 xn1 ≤ xn2.

Говорят, что последовательность xn строго убывает, если

∀n1, n2∈N: n1> n2 xn1 <xn2.

1. Пусть дана последовательность x~~n~~ и возрастающая последовательность

n1<n2<n3<...<nk <... натуральных чисел.

Последовательность yk=xnk называется подпоследовательностью последовательности xn

1. Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности xn называются частичными пределами этой последовательности
2. Пусть E—(непустое) множество частичных пределов последовательности xn.

Верхним пределом последовательности xn называется sup E и обозначается

lim (n→∞) xn или lim sup (n) xn.

Нижним пределом последовательности xn называется inf E и обозначается lim (n→)∞ xn или lim inf (n) xn

1. Последовательность xn называется фундаментальной, если

∀ε>0 ∃n0=n0(ε)∈N: ∀n> n0 ∀p ∈ N |xn+p−xn|<ε.



Утверждения.

1. Если множество X ⊂ N таково, что 1 ∈ X и ∀x ∈ X (x + 1) ∈ X, то X = N.

Доказательство. Действительно, X – индуктивное множество. Так как X ⊂ N, а N – наименьшее индуктивное множество, то X = N

1. Пусть X ⊂ R, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный sup X (inf X).

Пусть множество X ограничено сверху. Тогда множество его верхних границ B не пусто.

В силу определения верхней границы,

∀b ∈ B ∀x ∈ X x ≤ b.

Согласно аксиоме непрерывности, ∃c : x ≤ c ≤ b, ∀x ∈ X ∀b ∈ B.

Ясно, что c ∈ B. С другой стороны, в силу неравенства c ≤ b для всех b ∈ B, получается, что c = min B. Тем самым, c = sup X.

1. Пусть x ∈ R, x > 0. Для любого y ∈ R существует единственное целое k ∈ Z такое, что (k − 1)x ≤ y < kx

Пусть T = { l ∈ Z : y x < l} . Это множество не пусто, так как множество Z не ограничено сверху. Кроме того, T ограничено снизу. Тогда, по доказанному, существует k = min T. Значит, k − 1 ≤ y x < k и, в силу положительности x, мы получаем требуемое.

1. (Свойства последовательностей, имеющих предел).

Пусть lim (n→∞) xn = A. Тогда:

* + При A ∈R предел единственен.
  + При A ∈R последовательность xn ограничена.
  + В любой окрестности A ∈ R содержатся все элементы последовательности xn, за исключением не более чем конечного числа.

1. (Арифметические свойства пределовв R).

Пусть lim (n→∞) xn=A, lim (n→∞) yn=B, A, B ∈R.

Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в R, то:

* Предел суммы равен сумме пределов,тоесть xn+yn−→ (n→∞) A+B.
* Предел произведения равен произведению пределов, тоесть xnyn−→ (n→∞) AB.
* Предел частного равен частному пределов, тоесть xn/yn −→ (n→∞) A/B, yn=0.

1. (Предельный переход в неравенствах).

Пусть lim (n→∞) xn = A, lim (n→∞) yn = B, A,B ∈R.

* + Если xn > yn, начиная с какого-либо номера n0, то A ≥ B.
  + Если xn ≥ yn, начиная с какого-либо номера n0, то A ≥ B.

1. (О сжатой переменной).

Пусть, начиная с какого-то номера n0, выполняется xn ≤ zn ≤ yn.

Пусть, кроме того, lim (n→∞) xn = lim (n→∞) yn = A, A∈R.

Тогда lim (n→∞) zn = A

1. (Вейерштрасса)

Возрастающая последовательность xn сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем lim (n→∞) xn= sup (n) xn.

Убывающая последовательность xn сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем lim (n→∞) xn= inf (n) xn.

1. Пусть последовательность xn имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.
2. У любой ограниченной последовательности xn существует сходящаяся подпоследовательность
3. Последовательность xn сходится (в R) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.